



M. Smoluchowski

Uwagi – –

(Manuskrypt ~~do~~ artykułu dla Księgi pamiątkowej Orchowicza (Tow. przyj. nauk Polskiej) (Jest wydrukowany w dniu 30/10 1915)

Uwagi o pojęciu przypadku w zjawiskach fizycznych.

§1). Rachunek prawdopodobieństwa, który początkowo w fizyce ~~tak~~ (skromną) podrzędną rolę odgrywał, jako (w postaci) teorya błędów, ~~służąca~~ (służący do ~~obliczenia~~ najkorzystniejszego wyzyskania) materyału (liczbowego pomiarów) ~~obserwacyjnego~~ dowolnych, ~~[illegible]~~ coraz wyraźniej wysuwa się na czoło dzisiejszej nauki, jako najważniejsza metoda matematyczna najbardziej odpowiednia (dla jej celów.) ~~do [illegible] badań teoretycznych~~. Nie tylko teorya kinetyczna materyi, ale także elektronika, teorya promieniowania, nauka o promieniotwórczości polegają na zastosowaniu tej właśnie metody.

Dziwnem to może się wydawać z dwóch powodów.

Wszak (przedmiotem) fizyki są prawa przyrody, a przeciwieństwo, determinizm zdaje się być antitezą do przypadkowości, indeterminizmu, ~~tak~~ cechy (podstawowej) ~~[illegible]~~ dla rachunku prawdopodobieństwa.

Jak ~~[illegible]~~ wogóle może się zdarzyć „przypadek" w obrębie zjawisk podlegających ścisłym niezmiennym praw przyrody? A po drugie: Jeśli istotnie (nieobliczalny) przypadek odgrywa pewną rolę w zjawiskach fizyki, ~~[illegible]~~ jak można sobie wytłumaczyć objektywną (ważność) teoryi prawdop.? Jak można (w takim razie) przewidzieć przebieg tych zjawisk i stwierdzić wyniki dokładnie sprawdzalne przez doświadczenie?

Pytania w tej formie są może zbyt ogólnikowo sformułowane. ~~[illegible]~~ (bezpośrednich) lepiej będzie wobec tego określić problem w ściślejszy sposób: Jakie jest kryterium; W jakich wypadkach jesteśmy uprawnieni do twierdzenia że (skutek y, wywołany prawidłowo przyczyną x, może być uważany za przypadkowy? W jakich wypadkach przyczyny x przypadkowo działające mogą dać określony (prawidłowy) wynik y?

W tych kwestyach, posiadających zasadnicze znaczenie dla zastosowań teoryi prawdopodobieństwa, kierujemy się dotychczas (tylko) pewnego rodzaju intuicyą i dalecy jesteśmy od (ogólnego) ~~[illegible]~~ ścisłego sprecyzowania warunków (określających) ~~[illegible]~~ wypadki (które się nadają) ~~[illegible]~~ do traktowania z punktu widzenia owej teoryi prawdopodob. Także uwagi niniejsze (nie są wprawdzie odpowiedzią wyczerpującą, tylko mają zachęcić) ~~mają tylko [illegible]~~ do zajęcia się temi problemami.

[w których pojęciu (wiążą się z głębokimi) ~~[illegible]~~ rozstrzygnięciami Cournota

*) ... ~~[illegible]~~ szczegółowo zaznaczę że nie we wszystkiem podzielam jego zapatrywania.

§2). ~~[illegible]~~ Jest to powiedzenie bardzo stare i często słyszane: że pojęcie przypadku (słowo przypadek) jest tylko wyrazem naszej ignorancyi (nieświadomości) przyczyny pewnego zjawiska i że jakaś istota wszechwiedząca nie posługiwałaby się tym pojęciem. W fizyce znajduje ono zastosowanie wówczas jeśli (w pewnych razach) ~~[illegible]~~ znamy prawa rządzące jakiegoś zjawiska, nie znamy jednak ~~dokładnie~~ wszystkich wielkości określających jego ~~[illegible]~~ stan początkowy ("system bodźców"), tak że przyszłości nie możemy przewidzieć z matematyczną pewnością.

Co prawda i ~~[illegible]~~ [illegible] po prostu prawdopodobieństwo skutku zwiększa [illegible] na prawdopodobieństwo tej przyczyny która go z [illegible] koniecznością za sobą pociąga. Trzeba się zatem zastanowić nad dalszym pytaniem

Sama nieznajomość owych warunków początkowych jednak nie daje nam podstaw statystycznych do obliczenia; musimy jeszcze koniecznie mieć pewne dalsze wskazówki, aby wogóle mogło być mowa o prawdopodobieństwie. Objaśnię to następującym przykładem konkretnym.

Wyobraźmy sobie że artylerzysta z pewnego punktu O pocisk wyrzuca z prędkością początkową c pod takim kątem dowolnym, aby trafił punkt w odległości x. Zatem obliczyć wartość x jako funkcję (α, c) i na odwrót. O ile chodzi nam o zadanie teoretyczne, w którym wykluczamy opór powietrza, przypadkowe niedokładności ustawienia itp., jesteśmy równie pewni że przy obliczonej dowolnym α, punkt x_1 zostanie osiągnięty, jesteśmy również pewni że przy więcej dowolnych powtórzonych w granicach $\alpha_1 \ldots \alpha_2$ jakiś punkt celu o odległości od x_1 do x_2 zostanie trafiony.

Jeśli zaś (nie ... artylerzysta) kąta α, (n.p. nie może (2)) prędkość początkową v_0 świadomości warunków nie posiada danych (1) ... początkowych ... względnie (3) ... wadliwy.

Możemy przewidzieć tylko to że zależy to również od przypadku czy cel (odległy od x_1 do x_2) zostanie osiągnięty — ale co do prawdopodobieństwa tego zdarzenia nic wogóle powiedzieć nie można dopóki nie posiadamy jakichś dalszych wskazówek co do sposobu jak ów artylerzysta postępuje przy ustawianiu działa. Jest to może pole nadające się do spekulacji psychologicznych ale nie do obliczeń fizycznych.

(8). Natomiast zadanie otrzymuje od razu znaczenie całkiem określone (przypadek wchodzi w zakres fizyki ...), z chwilą kiedy robimy n.p. założenie że wszystkie możliwe kąty α są równie prawdopodobne. Wtedy z łatwością obliczymy że prawdopodobieństwo osiągnięcia celu $(x_2 - x_1)$ będzie $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi}$, to znaczy że przy wielokrotnym powtórzeniu takiego doświadczenia taki procent wystrzałów około celu chybi.

Jak urzeczywistnić w praktyce owo założenie jednakowego prawdopodobieństwa? Sposób dojścia się łatwo pomyśleć — choć trudniej wykonać — polega on na tem żeby nasz ... w ... oraz obrotowy koła osi poziomej ... w ... i żeby ... artylerzysta ... kontakt elektryczny w ... momencie (nieco ...) powodować wystrzał.

Możemy wyobrazić sobie zamiast tego podobny przykład, który daje się urzeczywistnić: Strzelca celującego ku tarczy, na której są obrócone wykreślone czerwone i białe wycinki, o jednakowych rozmiarach kątowych.

Dopóki tarcza jest nieruchoma, można starannie ustawić strzelbę ... i.t.d. Tak wiadomo że na pewno łatwiej można trafić wycinek czerwony; tak samo też przy nadzwyczaj powolnym obrocie tarczy. Przy szybkim obrocie prawdopodobnie zależeć będzie od wprawy strzelca, a wreszcie gdy obrót tak szybki prędkości się będzie dokonywał, że ... czerwonych i białych wycinków oko ludzkie nie rozróżni), wówczas zależy to może wyłącznie od czystego przypadku czy trafiony zostanie wycinek czerwony czy biały; prawdopodobieństwo dla jednego i drugiego wypadku (bez względu na zręczność strzelca) będzie $\frac{1}{2}$)

[illegible]

[illegible]

Pominiemy tu wszystkie bardziej ścisłe rachunki i przykład jest tak prosty że wydaje się banalnym, 13
jednak dobrze jest zanalizować ~~ściśle~~ [dokładnie] nawet takie najprostsze przykłady dla rozpoznania zasad charakterystycznych.

§4). Dla czego ~~sądzimy że przypadek~~ [mówimy że wynik zależy od przypadku ? w tym niezmiernie prostym obrocie]

Bo [warunkiem rozstrzygającym] wynik korzystny albo niekorzystny ~~zależy od~~ [jest] nadawanej dokładnie trafienia [odpowiedniego] momentu kiedy poruszyć należy na cyngiel — bez porównania dokładniejszym [co wymaga ścisłej wyższości] niż tego dokonać potrafi szybkość człowieka.

Jeśli np. tarcza posiada 24 wycinków i wykonuje 100 obrotów na sekundę, zależy to od różnicy czasu $\Delta t = \frac{1}{2400}$ sekundy w chwili wystrzału [czy wynik będzie korzystny czy nie]. Trudno ocenić szybkość decyzji i wprowadzenia jej w czyn ze strony strzelca, ale ~~z pewnością~~ [to jest dostatecznie pewne że nawet przy wystrzale „na komendę”] u najzręczniejszego strzelca będą te ponowić niedające się skontrolować ([przypadkowe]) zboczenia $\tau = \frac{1}{20}$ sekundy. ~~[illegible]~~ Na ten czas zaś przypada już [niedająca] wielka liczba ~~i to nieskończenie wiele~~ [wyników] przypadków korzystnych i niekorzystnych i obu ~~[illegible]~~ jednakowo często.

Jako cechy charakterystyczne, które [następnie] również i w innych przykładach [tego rodzaju] napotkamy, podkreślić trzeba następujące okoliczności:

1). [Nadzwyczajnie] Bardzo mała różnica warunków początkowych ([zmiennej t]) rozstrzyga o tem czy wynik będzie korzystny czy niekorzystny. ~~[illegible]~~ Mała przyczyna — duży skutek, oto co przedewszystkiem charakteryzuje „przypadek” w zjawiskach fizycznych.

Cóż znaczy jednak słowo „mała” różnica? ~~[illegible]~~ Rzecz oczywista, że to pojęcie względne. ~~to tzw~~ Otóż rozumiemy tu słowo to w znaczeniu małej w porównaniu z obszarem „niedającej się skontrolować zmienności” [τ] warunków początkowych. Wobec o przypadku tylko wówczas może być mowa jeśli właśnie warunki początkowe podlegają pewnym niedającym się [illegible] mogą się odbić (w obrębie pewnych niewielkich zmian. (okres τ). [sposób nieokreślony]

2). Wynik korzystny (lub niekorzystny) da się osiągnąć ~~[illegible]~~ przez wielką liczbę ~~sposobów wielkiej liczby kontrolnych~~ [różnych] możliwych kombinacji warunków początkowych — (w obrębie „niedającej się skontrolować” [przypadkowej] zmienności tychże).

~~Zatem~~ [czyli] ~~[illegible]~~ wielka liczba różnych przyczyn wywołuje ten sam skutek.

Wobec ~~trafienia~~ wynik [zostanie trafiony jeśli wystrzał nastąpi] ~~[illegible]~~ (albo w obrębie czasu ~~[illegible]~~ t do $t+\Delta t$, albo $t+2\Delta t$ do $t+3\Delta t$, albo $t+4\Delta t$ do $t+5\Delta t$ ... itd.

Wreszcie jeszcze [3] jedną właściwość ~~[illegible]~~ nieświadomie [2] wprowadzamy [1] w powyższy przykład: że

3). W obrębie ~~[illegible]~~ [przypadkowej] zmienności warunków początkowych prawdopodobieństwo danej i do wartości jest określone przez funkcję ~~[illegible]~~ rozłożoną, nie posiadającą bardzo maksymum i minimum. Jeśli ~~[illegible]~~ [pobudka] właściwa wystrzału od strzelca jak w powyższym przykładzie, będzie to znaczyło że prawdopod. pociągnięcia [że wystrzał] w chwili $t + n\Delta t$ będzie prawie to samo jak w chwili $t + (n+1)\Delta t$ itd., ale tego w tem pewna hipoteza.

§ 5).

zmiennych przy odbiciach o ściankach. Jeśli kształt tylko raz 2 wszystkich drobnych wymiarów jest danym, można sobie wykreślić drogę owej drobiny, która będzie się składać na ogół z wielkiej liczby prostolinijnych odcinków o najróżniejszych kierunkach, i można obliczyć czas który upłynie aż do chwili kiedy drobina przez otwór wyjdzie na zewnątrz, jako funkcję jej początkowego położenia i kierunku ruchu początkowego. (i wówczas jakie będzie prawdopodobieństwo, żeby ona drobina wskutek odbić dyfuzyjnych wyszła przez otwór na zewnątrz w pewnym czasie wylotu.)

Długość tego czasu będzie w najwyższym stopniu zmienną, zależnie od owych wielkości. Wszak przy minimalnej zmianie kierunku pierwotnego drobina uderzy o część ścianki inaczej położoną [z powodu drobnej „chropowatości" ścian], co pociągnie zasadniczą zmianę kierunku drogi po odbiciu. Każde odbicie działa w myśl (1) poprzednio wymienionej zasady (i mała różnica warunków początkowych — wywołuje — odległą różnicę skutków). Jeśli kierunek początkowy był w pewnych granicach przypadkowo dobrany, to też kierunki i położenia drobiny po kilkakrotnym odbiciu podlegają przypadkowi w głąb (wielokrotnie potęgowany). Także zasadę (2) odnajdujemy w tym przykładzie, gdyż ogromnie najrozmaitszych kombinacyj dróg początkowych będą posiadały ten sam skutek końcowy (wyjście drobiny przez otwór w danym czasie) *). Widzi się że warunek (3) ma tutaj zasadnicze znaczenie, o ile otwór jest tak mały iż całe zjawisko trwa dostatecznie długo.

$$n\omega \frac{c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \; 2\pi \sin\varphi \, d\varphi}{4\pi} = \frac{n\omega c}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}_{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{n\omega c}{4}dt = \nu$$

$$nV = N$$

$$\nu = \frac{\omega c}{4}\frac{N}{V}dt$$

$$T = \frac{4V}{\omega c N} \cdot \frac{4V}{\omega c}$$

wdyby np. z towarzyszącą potęgowany były kontakty elektryczne, [lub jakieś urządzenie mechaniczne] (które możnaby sobie tak urządzić

żeby prawdop. wystrzelenia w ~~[illegible]~~ kolejnych interwałach czasu było takie same w nieskończoność,

mimo krótkości tych interwałów. ~~[illegible] Do tych samych [illegible] powodów [illegible] jeszcze o~~

~~następujących przykładach~~

~~[illegible]~~

§5). ~~Przejdźmy teraz do innego przykładu, o tyle~~

[układ nie dlatego] W przykładzie tym pewien szczegół ~~[illegible]~~ pozo zadowolić nie może, a mianowicie że ~~[illegible]~~ (odwrotność [illegible]) prawdopod. przyjętej planetarnej, zależy od przyczyny lub frustracji ~~[illegible]~~ ustroju układu.

Dalej
Tu warto rozważyć jeszcze ~~[illegible]~~ inny przykład, ~~[illegible]~~

(dotyczący) kontinuowania przyczyn który daje prawdop. ~~[illegible]~~ względnie niezmienne dla wydarzenia się pewnego skutku w jakimkolwiek momencie czasu.

Wyobraźmy sobie naczynie (kuliste z małym otworkiem [o ścianie możliwie]) i o (ścianach chropowatych), ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ (bardzo drobne) (kuleczka — najlepiej drobne pory —) do którego wrzucamy ~~[illegible]~~ (idealnie sprężystą) z pewną prędkością c. (ruchome [illegible] przypadkowe)

~~[illegible]~~ przyjmiemy dla uproszczenia pominięcie wpływu ~~[illegible]~~ (ciężkości) ~~[illegible]~~ drobne ~~[illegible]~~

powracać się będzie [ciało] prostolinijnie ze stałą prędkością i tylko kierunek jej ruchu będzie się zmieniać w sposób ~~[illegible] nieregularny, przypadkowy [illegible]~~ o wypukłości i odbiciach

ścian naczynia. (Wogóle [illegible] dokładnie określonych) Nie ~~[illegible]~~ matematycznie, (tego przykładu) ale teoria kinetyczna gazów

~~[illegible]~~ daje nam bardzo poważne powody do przypuszczenia, że w tym rodzaju przykładach prawdopodobieństwo

kierunku i ... [z czasem] się staje jednostajne po upływie dostatecznie długiego czasu, to znaczy że

przy dowolnym kierunku początkowym — z wyjątkiem pewnych przypadków osobliwych —

po upływie dostatecznie długiego czasu owo drobne z jednakowem prawdop. poruszać się będzie ~~[illegible]~~ w jakimkolwiek

kierunku przestrzeni i we wszystkich ~~[illegible]~~ (elementy ściany) [illegible] naczynia przestrzeni równie często będzie uderzać.

Jeśli przyjmiemy to założenie dojdziemy do wyniku następującego:

Łatwo ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, że prawdopodobieństwo aby drobne ~~[illegible]~~ w pewnym czasie dt wyleciało przez ów otwór będzie wynosić $\frac{\omega c}{4 a^3 \pi} dt$ jeżeli ω oznacza powierzchnię otworu kuli.

(§6). Ponieważ ~~Znaczy~~ w fizyce jedno zjawisko [które] ~~[illegible]~~ w myśl [tej] ~~[illegible]~~ samej zasady: (rozkład) układ ~~[illegible]~~ atomów substancyi promieniotwórczych. Naczynie ~~[illegible]~~ takie (o wielkości ścianie [illegible]) z wypuszczaniem do środka ~~[illegible]~~ [szczelny] α

możemy przełożyć daje nam obraz rozkładania się atomu RaO.. ; Wzór określenie z pomiędzy n takich atomów

rozkładało by się w jednostce czasu: $\frac{\omega c}{4 a^3 \pi} n\, dt = -dn$, (więc układ następuje w myśl charakterystycznego [wyrażającego równaniem zasadniczo podobnym]

prawa ~~[illegible]~~ wykładniczego $n = n_0 e^{-\alpha t}$ przyczem ~~[illegible]~~ [współczynnik] $\alpha = \frac{\omega c}{4 a^3 \pi}$

(Oczywiście ~~[illegible]~~ [Ostatecznie to ma]) tylko znaczenie [świadomej] ilustracyi owego zjawiska, ale [daje ono jednak pewne wskazówki co do jego] ~~[illegible] jakie może być~~

mechanizmu przyczyn. W każdym razie (jak już Rutherford i Soddy zauważyli) nie można jest tłumaczenie

rozkładu w myśl porównania atomu z jakimś systemem planetarnym, posiadającym drogę [illegible] wolniejszą, również niemożliwym jest tłumaczenie

J.J. Thomsona, oparte na ~~[illegible]~~ przypuszczeniu że atom promieniotwórczy stopniowo energię swoją powolnie

w przestrzeń i skutkiem tego (doznaje ciągłej [przy pewnej krytycznej wartości energii układu] przemiany promieniotwórczej; Wówczas bowiem atomy musiałyby się

starzeć stopniowo i prawdop. rozkładu ~~[illegible]~~ [w pewnym czasie] musiałby być większy (niż) młodego atomu, co się sprzeciwia faktom [dla starszego] doświadczalnym

Musimy przypuścić że w atomach wciąż odbywają się jakieś nieregularne „[illegible]" zmiany, a tylko przypadkowe że podlegają po krótkim czasie zupełnie różnie w atomach których stan początkowy był bardzo podobny, i że (pewien niewielki drobny procent [illegible] wytwarza [illegible] pewne konstelacje wewnętrzne które właśnie tworzą tylko) pociąga za sobą proces rozkładowy. Czy zaś źródło tego procesu rozkładowego leży w atomie samym, czy też w ściśle otaczającym go [illegible] jest [illegible], [illegible] powodowaniem zewnętrznem które w pewne konstelacje działa rozkładowo — to jest dla nas sprawy zupełnie obojętne, dopóki wpływu nie możemy na zmianę tych czynników.

*) To ostatnie przypuszczenie prowadziłoby wobec z rozkładem fotoelektrycznym, który odbywa się również podług prawa przypadku przez.

Przykład popularny jest samej rzeczy istotnie zbyt skomplikowany, aby [illegible] dokładnie w [illegible] genezę przypadkowości [illegible]. Rozważmy wreszcie jeden przykład w którym najściślej źródło „przypadku"; sposób jego działania który się daje wyjaśnić. Jest to t. zw. deska Galtona, przyrząd który uważam za najlepszy model rachunku prawdopodobieństwa. Składa się on z deski nachylonej pod pewnym kątem do której wbito jest wielką liczbę gwoździ w jednakowych odstępach rzędami poziomemi; i to w taki sposób że naprzemian gwoździe jednego rzędu umieszczone są poniżej otworów poprzedniego szeregu. Kulki o jednakowej wielkości (z początku umieszczone w górnej krawędzi) [illegible] tocą się po niej (z [illegible] tej deski wypuszczane) [illegible] między niemi [illegible], się [illegible] do dolnej krawędzi, gdzie wpadają w odpowiednie przegrody. Okazuje się że układają się tam w myśl „prawa błędów" Gaussa $u = Ae^{-}$ tak że najwięcej ich się [illegible] ale w środku, poniżej punktu z którego je wypuszczano, a coraz mniej ku bokom; wypełnienie do których odnosi się w przypadku ilustruje [illegible] wzór Laplace'a.

(Łatwo zrozumiemy) działanie tego przyrządu, jeśli przyjmiemy że kulka [illegible] przechodząc między [illegible] odchyla się całkiem przypadkowo, tak że z jednakowem prawdopodobieństwem może się odchylać na jedną stronę jak i po drugiej stronie. Wówczas wynik każdego takiego zdarzenia elementarnego jest równie prawdopodobny przesunięcie odchylenia x o połowę odstępu między gwoździami, jak [illegible] zmniejszenie jego o ową wielkość [illegible]. Jeśli m oznaczmy liczbę rzędów gwoździ, a odstęp między gwoździami tego samego rzędu oznaczymy przez b, wówczas otrzymamy całkowite odchylenie $x = \frac{nb}{2}$ jeśli [illegible] $\frac{m+n}{2}$ razy doznała odchylenia dodatniego, a $\frac{m-n}{2}$ razy odchylenia ujemnego. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wyraża, w myśl znanego twierdzenia Bernoulliego, za tem dla większych liczb ostatecznie (krzywą Gaussa.

Procentowa liczba przypadających na przegrody w odstępie x [illegible]

$$P(x) \ldots = \ldots e^{-\frac{x^2}{n}} \, dx$$

Tak tłomaczy się łatwo prawidłowy wynik ostateczny, o ile przyjmiemy zasadę zupełnej co do zupełnej przypadkowości tych elementarnych (tylko [illegible] trudności, bo pozostaje nam do wytłumaczenia, dlaczego skutek każdego zderzenia kuli o gwóźdź można uważać za zupełnie przypadkowe.

Wprawdzie wydawałoby się, że początkowe położenie i początkowa prędkość kuleczki już po jej puszczeniu określają całe dalsze jej zachowanie się, gdyby się znało dostatecznie dokładnie tak wielkości jak i położenie wszystkich sztyfcików modelu, z góry obliczyć można by miejsce, w które (przy końcu) wpadnie. Co prawda, że w praktyce [illegible] dają się [illegible] czynniki uboczne jak (drobne nierówności deski, (między sztyfcikami kuleczki) minimalne wypukłości i odchylenia powierzchni kulki itd. wielki wpływ wywierają w wytworzeniu „przypadkowości”;

ale sądzę, że nawet pominąwszy te czynniki i uważając przypadek idealnie uproszczony można zrozumieć do pewnego stopnia (skąd tu pochodzi pozorna) „przypadkowość”.

[illegible] deskę, idealnie gładką (kulkę i sztyfciki), tak że tylko postępowy ruch, pod wpływem prędkości początkowej, ciężkości oraz uderzeń następujących [illegible] potrzeba. Załóżmy, że uderzenia (o sztyfciki) te odbywają się zupełnie niesprężyście, tak że (składowa) prędkości kuleczki, normalna do (płaszczyzny) styczności zostaje zniesiona, a składowa styczna pozostaje niezmieniona. Wówczas (obracając nachylenie deski (stosownie) może) łatwo jest wyjaśnić, że kuleczka uderzająca o sztyfcik A_1 zostanie (raczej) odbita ku sąsiednim sztyfcikom B_1 (tego samego rzędu) po prawej lub po lewej stronie, od nich znów odbije się ku [illegible] sztyfcikom A_1 itd., tak że po wielokrotnym odbiciu wpadnie przez otwór między temi dwoma sztyfcikami się przeciśnie.

Czy kulka przejdzie (przez otwór) po prawej czy po lewej stronie, to zależy od tego po której stronie sztyfcika (pierwszego rzędu po uderzeniu); po której stronie zaś następny sztyfcik B_2 uderzony zostanie, to zależy od (kierunku) minimalnej prędkości powstałej po wielokrotnym odbiciu (między $A_1 B_1$); a to znów zależy od miejsca w którym pierwsze uderzenie A_1 nastąpiło. Nadzwyczajnie mała różnica w położeniu tego punktu pociąga za sobą jako skutek nadanie (dowolnej) powstałej prędkości w kierunku ku prawej lub lewej ręce, a zatem przesunięcie kulki przy przejściu przez następny rząd o $+b$ lub $-b$.

(Rozpoznajemy więc znów) Cechę charakterystyczną (1) „mała przyczyna duży skutek”, a również cechę (2) odnajdujemy, gdyż przy przesuwaniu się (zależnie od położenia) punktu uderzenia (styczności) po powierzchni sztyfcika A od wierzchołka ku dołowi przechodzi kolejno (przy położeniu które) na przemian albo efekt + (albo −) występuje (w oprzemiennej zmianie); a zatem: (ten sam efekt + odpowiada [illegible]) „równe przyczyny, ten sam skutek”.

Właściwości te występują tu nawet w postaci szczególnie jaskrawej, gdyż liczba tych odbić będzie nieskończenie wielka jeśli (owe) odstępy między sztyfcikami równają się dokładnie średnicy kulki. Ze względu (na) symetrię tych odbić wnioskujemy dalej, że prawdopod. skutków ± są jednakowe.

Twierdzimy zatem: każde odbicie zależy (w sposób) od poprzedniego, ale (przy nieskończenie małej zmianie [illegible] [illegible] zależność ta nie da się przedstawić wyrażeniem analitycznym.) powoduje skończoną zmianę przyczyn + na − czy na odwrót, (więc [illegible] prawdopodobieństwa tych skutków przy każdym) uderzeniu elementarnym są równej wielkości.

(§ 7).

w rządach położonych
Że ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Oddziały ~~[illegible]~~ [illegible] są jednakowe i tak może
że kolaska [illegible] tylko przejść może ~~[illegible]~~ przez [illegible] przedstawione

§ 8. Słusznie jednak można powiedzieć że

~~W praktyce [illegible]~~ Rozumiemy że zatem nie tak się przedstawia jak gdyby ~~[illegible]~~ każde ~~[illegible]~~ przejście kuleczki przez otwór w szeregu wszystkich daje wynik zupełnie przypadkowy i niezależny od poprzedzających ich ~~kolejnych~~ jej wypadków.

W rzeczywistości „przypadkowość" takiego zdarzenia elementarnego nie będzie zupełna, gdyż przestrzeń między gwoździami musi być nieco większa niż średnica kuli, zatem liczba odbić nie będzie nieskończenie wielka i pozostanie na ogół pewien ~~[illegible]~~ ślad zależności między ~~kolejnymi~~ przejściami kulki przez kolejne rzędy, ale zależność ta bardzo szybko zanika ~~[illegible]~~ w ciągu ~~[illegible]~~ dalszych przejść i można ją na ogół pominąć.

Charakterystyczny zaś jest tu że wynik w przypadku wyodrębnionym przejścia (prawdop. tylko wówczas się daje zastosować jeśli) warunki początkowe są do pewnego stopnia zmienne, że jednak wynik ostateczny, stopień prawdopodobieństwa pewnego rozkładu, zupełnie od rodzaju tej zmienności nie zależy (– o ile tylko zmienność przypadkowa określająca ona jest funkcją analityczną). Czy będziemy się starać ~~[illegible]~~ wszystkie kulki puszczać w danym dokładnie tak samo, ~~czy mniej dokładnie~~ — to na wynik ostateczny nie wpłynie wcale; ułożą się one (w każdym razie) według krzywej Gaussa.

Przyrząd Galtona tworzy doskonałą ilustrację wielkiej klasy ~~[illegible]~~ zjawisk ~~[illegible]~~ fizycznych: zjawisk dyfuzyjnych. Jeżeli wypuszczamy z różnych punktów płaszczyzny szeregu wszystkich równocześnie kuleczki różnobarwne w określonej proporcji, to ~~[illegible]~~ szeregu wszystkich ujrzelibyśmy prawdop. stopniowe mieszanie się tych różnych kategorii kuleczek. Istotnie Galton wykazał że rozkład wynikający z kolejnych ~~[illegible]~~ przejścia przez kolejne szeregi wszystkich odpowiada matematycznie dokładnie zjawisku ~~[illegible]~~ postępującej w miarę czasu dyfuzji. Rachunek jest zupełnie identyczny z obliczeniem dyfuzji drobin gazowych lub cząsteczek wykonujących ruch Browna,*) ~~[illegible]~~. Różnica występuje tylko

*) Patrz [illegible]

w prawie określającym wynik „zdarzenia elementarnego". W przyrządzie następuje określone przesunięcie +b albo −b, podczas gdy w owych przypadkach istnieje przy każdym ~~[illegible]~~ zjawisku elementarnym (zderzeniu z inną drobiną itd.) możliwość że dowolny przesunięcia ~~[illegible]~~ dystansu lub mniejszego ~~[illegible]~~ w kierunku x; ~~Galton~~ można wykazać że wynik zawsze będzie ~~[illegible]~~ odpowiadał zjawisku dyfuzji, ~~[illegible]~~ jeśli tylko funkcja określająca prawdopodobieństwo przesunięć przy pojedynczym zjawisku elementarnym ~~jest funkcją~~ ciągłą, dającą się rozwinąć w szereg Mac Laurina, $f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots$

→ Przypuszczaliśmy dotychczas że deska Galtona jest w kierunku poziomym nieograniczona. Jeśli posiada ona ściany boczne, ~~ograniczające możność kulkom przesunięć~~ zamykające kulkom do powstania w obrębie odcinku od −l do +l, wówczas ~~[illegible]~~ przedstawia przyrząd ten obraz dyfuzji w naczyniu zamkniętym. Widzimy że ~~[illegible]~~ w razie dostatecznie długiego ~~[illegible]~~ czasu [t; dost. dużej liczby ~~[illegible]~~ rzędów wszystkich] wystąpi zupełne wyrównanie prawdop. dla położenia kulki

polega tylko na tem, że tam jako właściwy czynnik występuje człowiek, który jest naszym [illegible] nadzwyczaj niepewnie i zmiennie działającym.

Na pierwsze z pytań w początku postawionych otrzymaliśmy odpowiedź, która matematykowi wydać się wydawać bardzo prostą, nawet może banalną. W drugie z owych pytań (w jakich wypadkach przypadkowe przyczyny mogą pociągać za sobą prawidłowe skutki, jak przypadkowe przyczyny) załatwia się już samo przez się

gdyż przypadek w znaczeniu tu zastosowanym działa właśnie w pewnym sensie prawidłowo. Tak mianowicie wszystkie rozumieliśmy słowo przypadek – nie w sensie potocznym – w którym ono jest mniej więcej równoznaczne z kaprysem niezbadanym i zupełnie dowolnym

tylko oznacza pewną prawidłowość która się sprawdza z stosunkowo coraz większą dokładnością w miarę

(absolutnego powtórzenia podobnych zjawisk.)

Niestety jednak zastosowanie owego kryterium przypadkowości do szczególnych tych przykładów

które nas w tym kierunku najbardziej interesują, przedstawia niespodziewane dotychczas trudności.

Czujemy instynktownie, że Boltzmannowska metoda obliczania skutków zderzeń cząsteczkowych, oparta na

przyjęciu zupełnej przypadkowości zjawisk składowych (niezależności ..) t.z. Stosszahlansatz

jest bardzo prawdopodobnie ważna; (jednak poważne powody do przypuszczenia, że ona nie jest ścisła, nasuwa statystyczna dyskusja)

ale nie potrafimy dotychczas ocenić (kalkulacją) wielkości błędów wywołanych przez użycie owej Boltzmannowskiej zasady.

---

*) Wszystkie [illegible] które [illegible] stanu początkowego, wszystkie zaś [illegible] wszystkie [illegible] i [illegible] nowy wartości [illegible]

w jakiejbądź odległości — czyli zupełnie nowymi tylko przypadkowo rozdzielonych.

Przyrząd Galtona można by zresztą jeszcze mnóstwo sposobów zmodyfikować tak żeby [illegible] posłużył do studiowania innych jeszcze zjawisk fizycznych. Tak np. układając ustępcie asymetrycznie, tak żeby kulkom nadawały większe ~~[illegible]~~ przesunięcie w kierunku [illegible] niż w przeciwnym, a umieszczając równocześnie listwy pionowe dla przetrzymywania kulek w pewnym obszarze, otrzymalibyśmy rozkład analogiczny do „~~atmosfery~~" (układ) cząstek zawieszonych przyciąganych ku dołowi naczynia ~~[illegible]~~ wskutek ciężkości a od [illegible] w bliskości dna naczynia do którego.

~~Jeśli zaś wytnie się [illegible] przejście [illegible] (w kierunku [illegible]) w opadającej deszczu Galtona~~

równoległym, tak żeby przez nią szły

~~Podnosiłbym jeszcze fakt że [illegible]~~

Przykład ten zresztą jest pod pewnym względem możliwie najprostszy, a mianowicie prawdop. (wszystkie) zjawiska elementarne są zupełnie ~~[illegible]~~ takie same niezależnie od ~~[illegible]~~ odległości x już osiągniętej. Istotnie w przykładzie w fizyce jednak sprawa jest więcej skomplikowana, tak np. drobina posiadająca pewną prędkość początkową ξ w kierunku od x ~~[illegible]~~ doznaje przypadkowej zmiany tej prędkości przy spotkaniu z inną drobiną. Na ogół jednak prawdop. przyrostu prędkości ξ jest mniejsze niż ~~[illegible]~~ prawdop. ~~[illegible]~~ zmniejszenia się, i ~~[illegible]~~ ta różnica jest większa czem większa jest wartość ξ. Skutek wielokrotnych zderzeń jest w tym wypadku znowu nieco analogiczny do § gdyż wynikiem będzie prawo Gaussa — jest to właśnie słynne prawo rozkładu prędkości drobinowych Maxwella, ale różnica polega na tem że parametr krzywej Gaussa nie wzrasta w miarę czasu tylko pozostaje niezmienny (w związku z temperaturą gazu).

(§10). Zakończymy interesujące te, stanowiące w formie matematycznej ściślejszej i ogólniejszej myśli zasadniczej występującej w ~~[illegible]~~ omawianych przykładach przypadkowości.

Kiedy możemy powiedzieć że skutek y pewnej przyczyny x jest zupełnie przypadkowy (w przykładach zmiennej) ? tj. niezależny od wartości zmiennej x (która oczywiście jest jakąś niedokładnie określoną przyczyną)?

Warunek dostateczny dla przybliżonej przypadkowości jest następujący: Jeśli w tym obszarze $y = f(x)$ jest taką funkcją że — rozważmy w obszarze (w którym różne wartości) zmiennej x występują z prawdopodobieństwem nieznacznie różnym, wielkiej liczbie ~~[illegible]~~ przedziałów

$x \ldots x+\Delta x_1 \ldots x+\Delta x_2 \ldots x+\Delta x_3 \ldots$ odpowiada skutek Y_1 natomiast naprzemian leżącym przedziałom

$x+\Delta x_1 \ldots x+\Delta x_2, \quad x+\Delta x_3 \ldots$ odpow. " Y_2, wówczas

wystąpienie skutków Y_1, Y_2 można uważać przybliżenie za przypadkowe; ~~[illegible]~~

Jako ściśle przypadkowe możemy uważać wówczas jeśli ~~[illegible]~~ wszystkie te przedziały Δx są nieskończenie małe (w tym obszarze). Stosunek prawdopodobieństwa skutków Y_1, Y_2 wówczas jest oznaczony przez stosunek sumy przedziałów przyległych do nieprzyległych.

~~W przypadkach praktycznych [illegible]~~ W zjawiskach do których stosujemy w praktyce rachunek prawdop. zachodzi (występuje) taki wypadek tylko w mniej przybliżonem. Że rachunek prawdop. tak dobrze się zgadza z doświadczeniem przy różnych grach (hazardowych) itp.

(5 9).

Zasadnicze równanie przewodnictwa cieplnego jest identyczne z równaniem dyfuzji, zatem ten sam przyrząd jest równocześnie takim modelem przewodnictwa cieplnego w ~~[illegible]~~ razie rozkładu temperatury ~~[illegible]~~ zależnie od x jedynego.

Zastosow. z p. widzenia teorya [illegible], teorya [illegible]

Drugie problem

Jak może się zrodzić przypadek ?

uświadomić warunków początk. — Niewiadomo dlaczego. Nie potrafię nie można [illegible]

Jak mimo to można otrzymać wyniki pewniejsze ?
albo raczej które przypadki nadawają się do traktowania matematycznego ?
Dotychczas rzecz intuityw.; dokł. odnośnych warunków jeszcze nie sprecyzowano ; takie to tylko przypad.

Ale czasem bywa to zadaniem całkiem określonem, jeżeli np. wszystko ciągłe

wszystkie [illegible] przyczyn [illegible]

1). wtedy ~~[illegible]~~ różnica x (niedużo w stosunku!) powoduje dużą różnicę skutku y

2). Ten sam skutek y również identyczne ~~[illegible]~~ zmienia się x da się osiągnąć $x+\Delta x$, [illegible]

3). ~~[illegible]~~ Prawdop. x jest funkcyą regularną w zakresie bardzo drobnym w porównaniu do Δx, ...

Ale tutaj redukuje się przypadek do (determinizmu) ?

Dobrze się uważać, środkami całkiem mechanicznemi — nie znamy dokładnie skutku x, ale [illegible] ~~[illegible]~~ i [illegible] skutków nie będzie [illegible] od zmiany (błąd prawdop. x.)

Zatem i że $p(x)$ jest funkcyą regularną (tamte skutki co powoduje zmiany x) (np. gdyby był skutek elektryczny to wszystkie [illegible]).

Drobina rzucona do naczynia o ściankach idealnie odbijających ; wtedy teorya ślady wyliczyć ?

było w prdle

1
2
3

[illegible] powikłanie przypadków — // Zamiast tego też jeżeli biorę pewne wszystkie określony, a [illegible] (statystyczny)

rozkład prawdopodobny atomów

niemożliwe jest stopniowe stłoczenie się (przez mniejszą część)

Źródło może być zewnętrzne lub wewnętrzne, ale w każdym razie wskazujemy [illegible] wszystko,

Galtona deska — [illegible] — z którego mimo wszystko [illegible] dla wygrywania skutku

Zmiana skutku przypadku mała różnica Δx niedaleko Δy
[illegible] mało skończone Δy ; równającej nieciągła

czy następujące parabola nieciągła ? Jednak teorya przypadku — ~~[illegible]~~ Δx_1 | Δx_2

Δx_1 $\Delta x_2-\Delta x_1$
$\Delta x_3-\Delta x_2$ $\Delta x_4-\Delta x_3$

De facto jeszcze inaczej że [illegible], [illegible] x.

Rozkład ostateczny niezależny od tych wyników $e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ ...

$+$ $-$ $p = \sum p x$, $+p(x_3-x_2)$ + ...

Jeżeli się zmieniamy, to zawsze dostać. dużą [illegible] równomiern. pewność
(albo płyty umieszczone na powierzchni stożka, tak że przypadn...
z drugiej strony w przykładzie (2) Takie można jeżeli całkiem dowolne $e^{..}$

To jest typowe
Zjawisko dyfuzyi, Tak samo

ogólnie w mechanice dotąd system [illegible] całkiem determinist. [illegible], ale też że



$$8a\int_0^\pi \frac{\ldots\cos\varphi\,d\varphi}{\ldots}\sin\frac{\varphi}{2} = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\bar a = \frac{4a}{3}$$

$$\tau = \frac{\ldots}{\ldots}\frac{\bar a}{c}$$

$$\bar t = n\tau = \frac{\omega}{4a^2\pi}\cdot\frac{\bar a}{c} = \frac{\omega}{4a^2\pi}\frac{4a}{3}\frac{1}{c} = \frac{\omega}{\ldots} \quad \frac{16a^3\pi}{3\omega c}$$

ergodyczni [illegible]

π prawdop. [illegible] =

$$c\int_0^\pi \frac{2\pi\sin\varphi\,d\varphi}{4\pi\cdot 2a\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{c}{4a}\int_0^\pi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

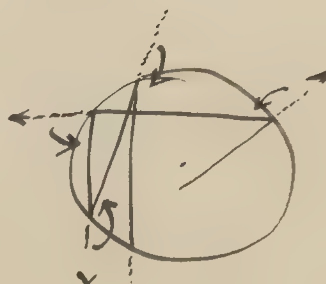
$$= \frac{c}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{c}{a}$$

prawdop. uderzenia w czas. dt

$$\frac{\omega}{4a^2\pi}\frac{c}{a}\,dt$$

$$\alpha\, n\,dt = -\frac{dn}{n}$$

$$n = e^{-\alpha t}$$



prawdop. odchyl. kąt dewiacji byłby wartości według prawa $e^{-\frac{\varphi^2}{t}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,dx = A\sqrt{\pi\,2\times 6^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi\ldots}}$$

$$1 = 2A6$$

$$A = \frac{1}{26}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\; e^{-\frac{x^2}{2n6^2}}$$

7

Jak determinizm praw fizycznych powstaje?

niewiadomość? nie ma znaczenia: jakie prawdop. żeby punkt A trafił (w punktowej pozycji) jeśli początkowe położenie c, kierunek α ?

albo trafi albo nie ; [illegible] [illegible]

nie ma sensu ł jakie prawdop. jeśli położenie pocz. c. (α dowolne)

bo nie posiadamy nic więcej

ale ma sens : jakie prawdop. jeśli położenie pocz. c [trafić α_1 – α_2]

jeśli wszystkie kierunki równie częste

---

zmienność warunków początkowych i przyczynowych ; zasięg bardzo [illegible]

skutek bardzo mocny ; Poincaré

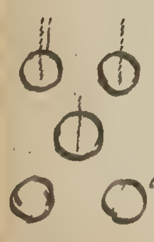
---

ale to nie wystarczy — nie możemy powiedzieć jakie prawdop. trafienia na tarczę jeśli nie znamy strzelby, stołu i strzelca

więc musi mieć taki układ żeby odstęp [illegible] [illegible]

[illegible] przypadek : ruchy Browna [illegible]

Galton deska — Browna ruch, — dyfuzja



potrzeba symetrii procesu elementarnego.

zderzenie : drobiny

o ile nieograniczona deska $e^{-\frac{x^2}{n}}$

w biologii [illegible] [illegible] tego samego ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ [illegible] [illegible]

model dyfuzji i rozpraszania: z różnych miejsc [illegible] różnokolorowe kulki

jeśli opuszczamy bramę, ustali się rozkład równomierny | połączy na wszystkie punkty. przypadek

~~układ równomierny jest~~, wyrównanie się różnic koncentracji, [illegible], [illegible] — ruch kul w [illegible] z wszystkich otworów!

a wypływ nie byłby równomierny gdyby jakieś bramy były zależne od α || rozkład prawdopodob. stanów?

← jest to idealny układ! <

dwa różne modele: 1). deska Galtona z szeregiem [illegible] w dole ; gdy kula wpadnie, wylatuje ; ilość kul [illegible] $e^{-x\alpha}$

dyfuzja przy [illegible] [illegible] w naczyniu o rozmiarach [illegible] do x

tutaj każde zderzenie elementarne równie prawd. zbliża lub oddala o jeden krok

2). ruch kul (bryła [illegible]) w naczyniu o [illegible] ścianach (odbicia niesprężyste) z otworkiem

każde odbicie może zupełnie oddalić albo zbliżyć

~~[illegible]~~ wyrównanie w naczyniu o rozmiarach [illegible] do λ

zapomni to drugie przez odbicie do przodu

czy [illegible] [illegible] wypadku czy [illegible] prawdopodobieństwo — dwie prawdop.

to wszystko jedno, chodzi o koncentracje

Wspólna cecha : warunki początk., [illegible] [illegible] do obliczania

wystarczy zmienność jednego z warunków (kąt kierunku α, odległość [illegible]) w pewnym (wąskim) obszarze

wielkość tego obszaru nieistotna na wartość ostateczną [choć [illegible] [illegible] = f(x)]

dlatego nie potrzeba wcale wymieniać [illegible] ; nie zwracamy nań uwagi ; czy A B C (osoby) eksperymentują z deską Galtona, których indywid. [illegible] różne — efekt będzie taki sam.

$$p_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(z)\, p_1(x-z)\, dz \qquad x - z = y \qquad z = x - y$$

$$p_3(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(z)\, p_1(x-z)\, dz = \int_{-\infty} p_2(x-z)\, p_1(z)\, dz$$

$$p_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{n-1}(z)\, p_1(x-z)\, dz = \int_{-\infty} p_{n-1}(x-z)\, p_1(z)\, dz$$

$$p_2(x) = \frac{1}{\pi}\int dq \iint [p_1(\alpha)]\, d\alpha\, [p_1(\beta)]\, d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q(z-\alpha) \cos q(x-z-\beta)\, dz$$

$$\int e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$
$$\int x e^{-\alpha x} = +\frac{1}{\alpha^2}$$
$$\int x^2 e^{-\alpha x} dx = +\frac{2}{\alpha^3}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\alpha^2\, d\alpha}{2\lambda}\int_\alpha^\infty \frac{e^{-\frac{\rho}{\lambda}}}{\rho}\, d\rho = \frac{1}{4\lambda}\int_0^\infty \frac{\alpha^3}{3} e^{-\frac{\alpha}{\lambda}}\, d\alpha = \frac{\lambda^2}{12}\int_0 x^2 e^{-x} dx$$
$$= \frac{\lambda^2}{6} = b$$

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{2\lambda}\int_\alpha^\infty \frac{e^{-\frac{\rho}{\lambda}}}{\rho} = \frac{1}{2}\int e^{-x} dx = \frac{1}{2} = a$$

$$\beta = \frac{2}{6}\lambda^2 = \frac{1}{3}\lambda^2$$

Somit
$$p_n(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n\beta}}\, e^{-\frac{3x^2}{4n\lambda^2}}$$
$$= \frac{1}{4\lambda}\sqrt{\frac{3}{\pi n}}\, e^{-\frac{3x^2}{4n\lambda^2}}$$
(wie 2(1:2)) Somit identisch mit (27)

w każdym razie:
$$\int_0^\infty p_1(\alpha)\left[1 - q^2\frac{\alpha^2}{2} + \dots\right] d\alpha$$

$$\int_0^\infty p_1(\alpha) \cos q\alpha\, d\alpha = a\left(1 - \beta q^2\right) + \dots$$

$$a = \int_0^\infty p_1(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2}\,!$$

$$b = \int_0^\infty p_1(\alpha)\cdot\frac{\alpha^2}{2}\, d\alpha \qquad \beta = \frac{\int_0^\infty p_1(\alpha)\frac{\alpha^2}{2}\, d\alpha}{\int_0^\infty p_1(\alpha)\, d\alpha}$$

ważny o tyle o ile $\beta n q^2$ duże w takim obszarze gdzie q jeszcze dostatecznie małe a zatem dla dostatecznie dużych n

$$p_1(z) = 2\pi\int W(r)\, r^2\, dr = \int W\left(\frac{z}{\cos\varphi}\right) 2\pi z^2 \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi$$
$$= 2\pi\int W\left(\sqrt{z^2+y^2}\right) y\, dy\, dz$$

$$p_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(\alpha) \cos q(z-\alpha)\, d\alpha$$
$\cos qz \cos q\alpha + \sin qz \sin q\alpha$

~~$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dq \int_0^\infty p_1(\alpha) \cos q(z-\alpha)\, dz$$~~

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos qz\, dq \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(\alpha) \cos q\alpha\, d\alpha$$

$$p_1(x-z) = \frac{1}{\pi}\int_0 \left[\cos qx \cos qz + \sin qx \sin qz\right] dq \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(\alpha) \cos q\alpha\, d\alpha$$

$$p_2(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos qx\, dq \int \cos qz \cdot p_1(z)\, dz + \dots \int p_1(\alpha) \cos q\alpha$$

$$p_2(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos qx\, dq \left[\int_0^\infty p_1(\alpha) \cos q\alpha\, d\alpha\right]^2$$

$$p_2(x-z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \{\cos qx \cos qz\, dq\, [\dots]^2 + \sin qx \sin qz\, dq\, [\;]^2\}$$
$p_1(z)\, dz$

$$p_3(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \cos qx\, dq \left[\int_0^\infty p_1(\alpha) \cos q\alpha\, d\alpha\right]^3$$

$$p_n(x) = \frac{2^{n-1}}{\pi}\int_0^\infty \cos qx\, dq \left[\int_0^\infty p_1(\alpha) \cos q\alpha\, d\alpha\right]^n$$

$$\varphi(q) = a - bq^2 + \dots$$
$$= a^n e^{-\beta n q^2}$$

$$= \frac{(2a)^n}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n\beta}}\, e^{-\frac{x^2}{4n\beta}}$$ analogicznie do (27)

$$p_n(x) = \frac{\dots}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{t}}\, dx$$

$$\beta = \frac{\int_0^\lambda \frac{x^2}{2}\, dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{\frac{\lambda^3}{6}}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{6}$$

$$n = \frac{ct}{\lambda} \qquad 4n\beta = \frac{2ct}{3}\lambda$$ stimmt mit (13)

$$\beta = \frac{1}{2}\,\frac{\int_0 x^2 e^{-\frac{x}{\lambda}} dx}{\int \frac{e^{-\frac{x}{\lambda}}}{x} dx} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\int x\, e^{-x} dx}{\int_0 \frac{e^{-x}}{x} dx}$$

Remarques relatives à la notion du hasard dans les phénomènes physiques.

L'auteur

essaye de donner une charactéristique de ce qu'on entend par hasard dans la

physique. En analysant en détail quelques modèles mécaniques, qui servent

à illustrer le rôle du hasard dans les phénomènes physiques, il arrive à la conclusion

(bien définie)

que cette notion désigne une relation entre cause et effet, que la probabilité

certaine

On dit qu'un effet (secondaire) est dû au hasard si

désignant

la forme de la fonction, la probabilité des diverses valeurs

de l'effet secondaire, est indépendante de la fonction qui désigne la distribution

de la probabilité dans le domaine de variabilité de la cause primaire. L'auteur

établit concernant la liaison

discute la nature des conditions suffisantes un système de conditions, entre cause et effet,

énonce un système de conditions pour suffisantes pour qu'un effet secondaire

puisse être attribué au hasard.



